

第2讲 二次函数之线段、面积问题

一、单线段最值问题

一条线段的长度最值问题，通常都是由动点产生的，通过从动点处作垂直等方式与直线或者抛物线相交，求这个过程产生的某条线段的最值。

思考：

①动点 P 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上，设 P 点横坐标为 m ，

则点 P 坐标可以表示为 $(m, am^2 + bm + c)$

②平行于 x 轴的直线上的点 纵 坐标相同，平行于 y 轴的直线上的点 横 坐标相同。

③平行于 y 轴的线段的长度可用两个端点的 纵 坐标之 差 的 绝对值 表示；

平行于 x 轴的线段的长度可用两个端点的 横 坐标之 差 的 绝对值 表示。

【备注】 此外在平面直角坐标系中还可利用两点间距离公式表示线段长度

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \text{ 可在课上进行提问}$$

 举个“栗子”

 栗子1

1. 2020年天津河北区初三二模第25题10分 ★★★

已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(-1, 0)$ ，另一个交点为 B ，与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ ，顶点为 D 。

(1) 求二次函数的解析式和点 D 的坐标。

(2) 若点 M 是抛物线在 x 轴下方图象上的一动点，过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交线段 BC 于点 N ，当 MN 取最大值时，点 M 的坐标。

【备注】 (2)中表示出 MN 的函数解析式后，要注意好自变量的取值范围（由 M 在 x 轴下方，可得 $-1 < x < 3$ ），在求解函数最值时，也要验证对称轴是否在范围内

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ ， $D(1, -4)$ 。

(2) $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 。

【解析】 (1) 将 A 、 C 代入解析式 $\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$ ，

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3.$$

$$\text{化成顶点式：} y = (x - 1)^2 - 4,$$

$$\therefore D(1, -4).$$

(2) 由(1)知 $B(3, 0)$, $C(0, -3)$,

设 BC 解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = -3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases}.$$

$\therefore BC$ 解析式为 $y = x - 3$,

设 $M(m, m^2 - m - 3)$, $N(m, m - 3)$,

$$MN = m - 3 - (m^2 - m - 3)$$

$$= -m^2 + 3m$$

$$= -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad (-1 < m < 3),$$

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, MN 有最大值, 此时 $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$.

【标注】【数学思想】分类讨论思想

【题型】题型：二次函数与动点问题

【题型】题型：二次函数一般式

【题型】题型：顶点坐标

【题型】题型：二次函数平移变换

【知识点】二次函数的一般式

【知识点】二次函数的平移

【知识点】二次函数的图象和系数的关系

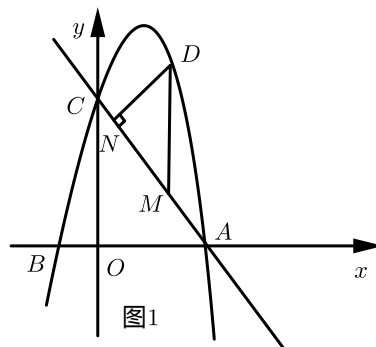
栗子2

2. 2021年天津南开区初三中考一模第25题10分 ★★★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过 $A(4, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 4)$ 三点.

(1) 求抛物线的函数解析式.

(2) 如图1, 点 D 是在直线 AC 上方的抛物线的一点, $DN \perp AC$ 于点 N , $DM \parallel y$ 轴交 AC 于点 M , 求 $\triangle DMN$ 周长的最大值及此时点 D 的坐标.



【备注】此题中难点在于表示 DN 的长度, 利用特殊直角三角形及 DM 表示 DN 、 MN

【答案】(1) $y = -x^2 + 3x + 4$.

(2) $4\sqrt{2} + 4$, $D(2, 6)$.

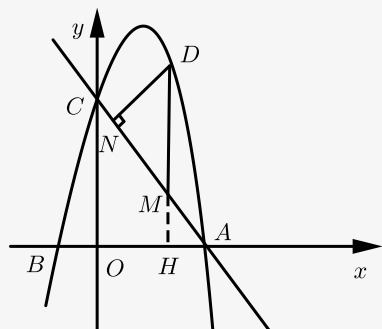
【解析】(1) 依题意, 得 $y = a(x-4)(x+1)$ ($a \neq 0$),

将 $C(0, 4)$ 坐标代入得, $-3a = 3$,

解得 $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 3x + 4$.

(2) 延长 DM 交 x 轴于点 H ,



$\because OA = OC = 4$, $OA \perp OC$, $DM \parallel y$ 轴交 AC 于点 M ,

$\therefore \angle OAC = 45^\circ$, $\angle AHM = 90^\circ$,

$\because DN \perp AC$ 于点 N ,

$\therefore \angle AMH = \angle DMN = 45^\circ$,

$\therefore \triangle DMN$ 是等腰直角三角形,

$\therefore DN = MN = \frac{\sqrt{2}}{2} DM$,

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b'$,

将 $A(4, 0)$, $C(0, 4)$ 两点坐标代入得 $\begin{cases} 4k + b' = 0 \\ b' = 4 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b' = 4 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x + 4$,

设 $D(m, -m^2 + 3m + 4)$,

$\therefore M(m, -m + 4)$,

$\therefore DM = -m^2 + 3m + 4 - (-m + 4) = -m^2 + 4m = -(m-2)^2 + 4$,

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $DM_{\max} = 4$,

此时 $D(2, 6)$,

$\because \triangle DMN$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \triangle DMN$ 周长 $= DN + MN + DM = \frac{\sqrt{2}}{2} DM + \frac{\sqrt{2}}{2} DM + DM = (\sqrt{2} + 1) DM$,

$\therefore \triangle DMN$ 周长的最大值为 $4(\sqrt{2} + 1) = 4\sqrt{2} + 4$, 此时 $D(2, 6)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

二、面积最值问题

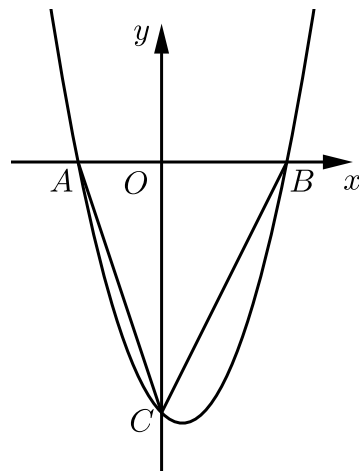
1. 公式法

当三角形底或高在 x 轴， y 轴或在平行于 x ，平行于 y 轴的直线上时，直接利用面积 $S = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$

栗子3

3. 2019~2020学年12月山东济南历下区济南燕山学校初三上学期月考第15题 ★★

如图所示，二次函数 $y = x^2 - x - 6$ 的图象交 x 轴于 A ， B 两点，交 y 轴于 C 点，则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ .



【答案】 15

【解析】 在 $y = x^2 - x - 6$ 中，令 $y = 0$ ，则 $x^2 - x - 6 = 0$ ，

解得： $x_1 = 3$ ， $x_2 = -2$.

则 A 的坐标是 $(-2, 0)$ ， B 的坐标是 $(3, 0)$ ，

$\therefore AB = 5$.

在 $y = x^2 - x - 6$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -6$.

则 $OC = 6$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$.

【标注】 【知识点】 二次函数与面积

4. 2017年天津红桥区初三中考二模第25题10分 ★★★★★

已知抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ 与 x 轴相交于不同的两点 A 、 B .

(1) 求 m 的取值范围 .

(2) 证明该抛物线一定经过非坐标轴上的一点 P ，并求出点 P 的坐标 .

(3)

当 $\frac{1}{4} < m \leq 8$ 时，由 (2) 求出的点 P 和点 A, B 构成的 $\triangle ABP$ 的面积是否有最值？若有，求出该最值及相对应的 m 值。

【答案】 (1) $m \neq \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$ 。

(2) $P(3, 4)$ 。

(3) 当 $m = 8$ 时，面积最大为： $\frac{31}{4}$ 。

【解析】 (1) 当 $m = 0$ 时，函数为一次函数，不符合题意，舍去；

当 $m \neq 0$ 时，

$\because$ 抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ 与 x 轴相交于不同的两点 A, B ，

$$\therefore \Delta = (1 - 2m)^2 - 4 \times m \times (1 - 3m) = (1 - 4m)^2 > 0,$$

$$\therefore 1 - 4m \neq 0,$$

$$\therefore m \neq \frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0.$$

(2) $\because$ 抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ ，

$$\therefore y = m(x^2 - 2x - 3) + x + 1,$$

抛物线过定点说明在这一点 y 与 m 无关，

显然当 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 时， y 与 m 无关，

解得： $x = 3$ 或 $x = -1$ ，

当 $x = 3$ 时， $y = 4$ ，定点坐标为 $(3, 4)$ ；

当 $x = -1$ 时， $y = 0$ ，定点坐标为 $(-1, 0)$ ，

$\because P$ 不在坐标轴上，

$\therefore P(3, 4)$ 。

(3) 方法一： $|AB| = |x_A - x_B|$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - 2m)^2 - 4m(1 - 3m)}}{|m|} \\ &= \sqrt{\frac{1 - 4m + 4m^2 - 4m + 12m^2}{m^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - 4m)^2}{m^2}} \\ &= \left| \frac{1 - 4m}{m} \right| \\ &= \left| \frac{1}{m} - 4 \right|. \\ &\because \frac{1}{4} < m \leq 8, \\ &\therefore \frac{1}{8} \leq \frac{1}{m} < 4, \\ &\therefore -\frac{31}{8} \leq \frac{1}{m} - 4 < 0, \\ &\therefore 0 < \left| \frac{1}{m} - 4 \right| \leq \frac{31}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |AB| \text{最大时}, \left| \frac{1}{m} - 4 \right| &= \frac{31}{8}, \\ \text{解得: } m &= 8, \text{ 或 } m = \frac{8}{63} \text{ (舍去)}, \\ \therefore \text{当 } m &= 8 \text{ 时}, |AB| \text{ 有最大值 } \frac{31}{8}, \\ \text{此时 } \triangle ABP &\text{ 的面积最大, 没有最小值,} \\ \text{则面积最大为: } \frac{1}{2} |AB| y_P &= \frac{1}{2} \times \frac{31}{8} \times 4 = \frac{31}{4}. \\ \text{方法二: } \because y &= mx^2 + (1-2m)x + 1-3m = (mx+1-3m)(x+1), \\ \therefore x_1 &= -1, x_2 = 3 - \frac{1}{m}, \\ \therefore AB &= |x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{m} - 4 \right|. \\ \because \frac{1}{4} < m &\leq 8, \therefore \frac{1}{8} \leq \frac{1}{m} < 4, \therefore \frac{1}{m} - 4 < 0. \\ \therefore AB &= 4 - \frac{1}{m}, \therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(4 - \frac{1}{m} \right) = 8 - \frac{2}{m}, \\ \therefore \frac{1}{m} &\text{ 有最小值 } \frac{1}{8}, \text{ 无最大值,} \\ \therefore \text{当 } m &= 8 \text{ 时}, S_{\triangle PAB} = 8 - \frac{2}{m} \text{ 有最大值 } 8 - \frac{2}{8} = \frac{31}{4}, \text{ 无最小值.} \\ \text{故答案为: } &\frac{31}{4}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 割补法

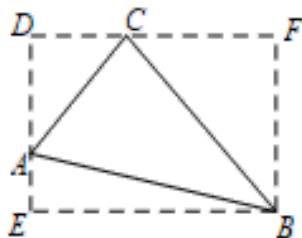
①割：

将平面内的几何图形分割成几个可以计算相应线段长度的规则图形，分别利用公式法求每个小块图形的面积得到该几何图形的面积.

②补：

如图，求 $\triangle ABC$ 的面积，首先过三顶点做横平竖直的直线围成矩形，用矩形面积减掉其他三个直角三角形的面积（即采用整体-部分的方法求目标图形的面积）：

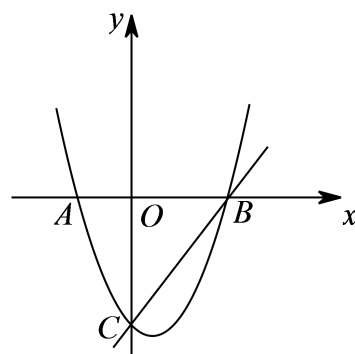
$$S_{\triangle ABC} = S_{\text{矩}DEBF} - S_{\triangle DAC} - S_{\triangle AEB} - S_{\triangle CBF}$$



栗子4

5. 2018年天津武清区初三一模第25题 ★★★★★

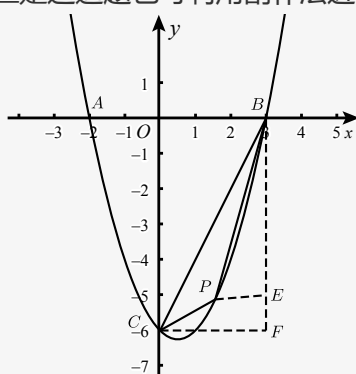
如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx - 6$ 的图象交坐标轴于 $A(-2, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，抛物线与 y 轴相交于点 C ，抛物线上有一动点 P 在直线 BC 下方。



(1) 求这个二次函数的解析式.

(2) 动点 P 运动到什么位置时, $\triangle PBC$ 面积最大. 求出此时 P 点坐标和 $\triangle PBC$ 的最大面积.

【备注】 解析中给出的铅锤法求面积, 但是这道题也可利用割补法进行求解:



$$S_{\triangle BCP} = S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BPE} - S_{\text{梯}PEFC}$$

【答案】 (1) $y = x^2 - x - 6$.

(2) 当 P 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{21}{4}\right)$ 时, $\triangle PBC$ 的最大面积为 $\frac{27}{8}$.

【解析】 (1) $\because A(-2, 0), B(3, 0)$ 在抛物线上,

$\therefore$ 将坐标代入二次函数 $y = ax^2 + bx - 6$, 得 $\begin{cases} 4a - 2b - 6 = 0 \\ 9a + 3b - 6 = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$,

$\therefore$ 所求二次函数解析式为 $y = x^2 - x - 6$.

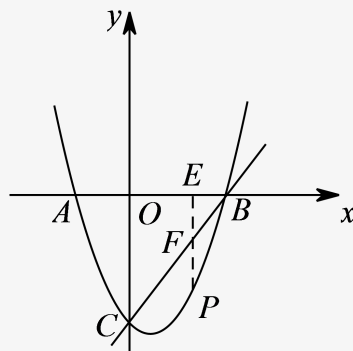
(2) $\because P$ 点在抛物线上, 设 P 点坐标为 $(m, m^2 - m - 6)$,

过 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E 点, 交 BC 于 F 点,

$\because$ 由 $B(3, 0), C(0, -6)$, 得直线 BC 解析式为

$$y = 2x - 6,$$

$\therefore F$ 点坐标为 $(m, 2m - 6)$,



$$\therefore PF = y_F - y_P = (2m - 6) - (m^2 - m - 6) = -m^2 + 3m .$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PFC} + S_{\triangle PBF}$$

$$= \frac{1}{2} PF \cdot OE + \frac{1}{2} PF \cdot BE$$

$$= \frac{1}{2} PF(OE + BE)$$

$$= \frac{1}{2} PF \cdot OB$$

$$= \frac{1}{2} (-m^2 + 3m) \cdot 3$$

$$= -\frac{3}{2} \left(m - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{27}{8} ,$$

$$\text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } S_{\triangle PBC} \text{ 最大值为 } \frac{27}{8} , \text{ 此时 } y_P = m^2 - m - 6 = -\frac{21}{4} ,$$

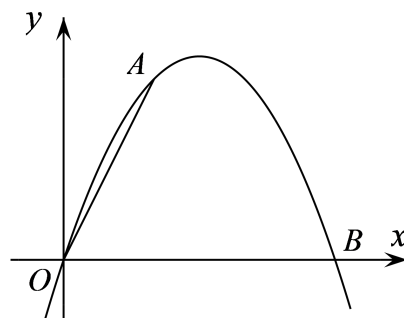
$$\therefore \text{当 } P \text{ 点坐标为 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{21}{4} \right) \text{ 时, } \triangle PBC \text{ 的最大面积为 } \frac{27}{8} .$$

【标注】【题型】题型：二次函数与动点问题

栗子5

6. 2016~2017学年10月天津南开区天津市南开中学初三上学期月考第21题12分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像经过点 $A(2, 4)$ 与 $B(6, 0)$.



(1) 求 a , b 的值 .

(2) 点 C 是该二次函数图像上 A , B 两点之间的一动点，横坐标为 x ($2 < x < 6$) , 写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值 .

【答案】(1) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$.

(2) S 取得最大值 16 .

【解析】(1) 把点 $A(2, 4)$ 与 $B(6, 0)$ 代入抛物线，

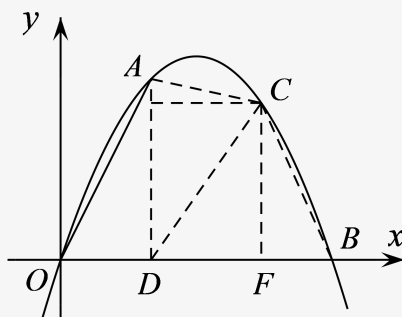
$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 36a + 6b = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{2} , b = 3 .$$

(2) 过 A 作 $AD \perp x$, 又作 $CF \perp x$, $CE \perp AD$,

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} OD \cdot AD = 4 ,$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle ACD} &= \frac{1}{2} AD \cdot CE = 2x - 4, \\ \therefore S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} BD \cdot CF = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right), \\ \therefore S &= S_{\triangle AOD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = -x^2 + 8x, \\ \therefore \text{当 } x &= 4 \text{ 时, } S \text{ 取得最大值 } 16.\end{aligned}$$

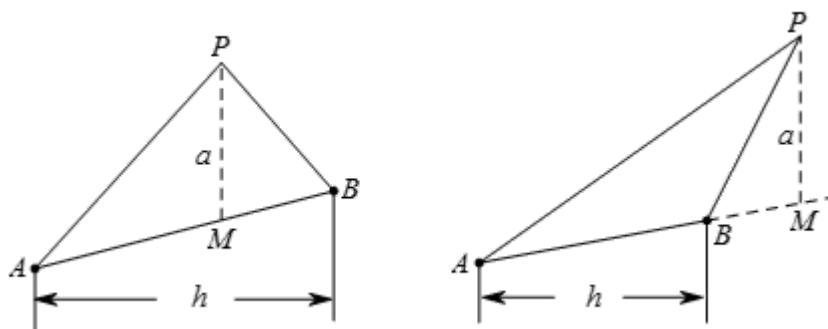


【标注】【知识点】二次函数与面积

3. 铅锤法

如图，过动点 P 向 x 轴作垂线，交对边 AB 于点 M ，

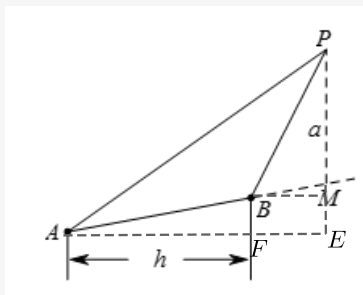
左图 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAM} + S_{\triangle PBM}$ ；右图 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAM} - S_{\triangle PBM}$ 。



记 $PM = a$ ，点 A 与点 B 之间横坐标的差值为 h ，则 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}ah$ 。

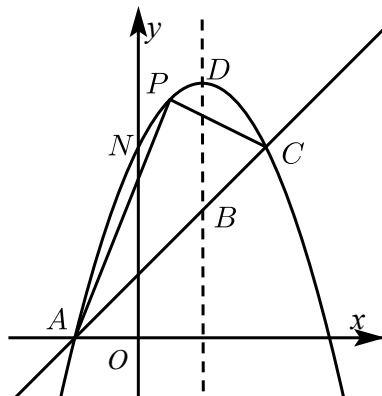
【备注】其实铅锤法求面积也是源于割补思想；上述右图

$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle APM} - S_{\triangle PBM} = \frac{1}{2}PM \cdot AE - \frac{1}{2}PM \cdot EF = \frac{1}{2}PM \cdot AF$$



7. 2018~2019学年10月天津和平区天津市第一中学初三上学朞月考第24题12分 ★★★

如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与一直线相交于 $A(-1, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 两点，与 y 轴交于点 N ，其顶点为 D 。



(1) 求抛物线及直线 AC 的函数关系式。

(2) 若 P 是抛物线上位于直线 AC 上方的一个动点，求 $\triangle APC$ 的面积的最大值及此时点 P 的坐标。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$ 。

(2) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 将点 A 和点 C 的坐标代入抛物线的解析式得：
$$\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -4 + 2b + c = 3 \end{cases}$$

解得： $b = 2$, $c = 3$ 。

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

设直线 AC 的解析式 $y = kx + b$ 。

$\because$ 将点 A 和点 C 的坐标代入得 $\begin{cases} -k + b = 0 \\ 2k + b = 3 \end{cases}$ ，解得 $k = 1$, $b = 1$ 。

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 1$ 。

(2) 如图，设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$ ，

$\therefore Q(m, m + 1)$ ，

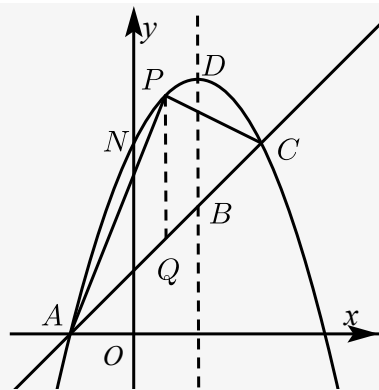
$\therefore PQ = (-m^2 + 2m + 3) - (m + 1) = -m^2 + m + 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ ，

$\therefore S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PQ \times |x_C - x_A|$

$= \frac{1}{2}\left[-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right] \times 3 = -\frac{3}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$ ，

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时， $S_{\triangle APC_{\text{最大}}} = \frac{27}{8}$ ， $y = -m^2 + 2m + 3 = \frac{15}{4}$ ，

$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ 。

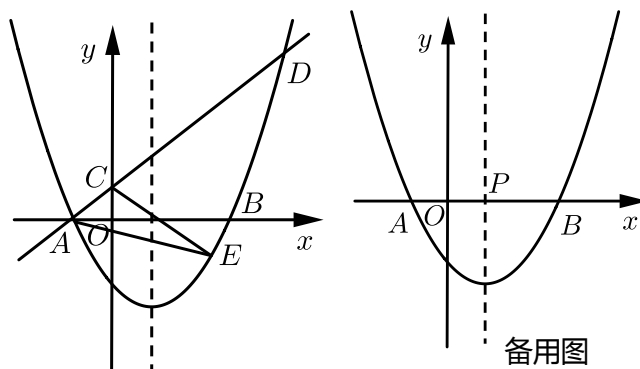


【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

栗子7

8. 2019~2020学年天津河西区天津市培杰中学初三上学期期末第25题10分 ★★★★★

在平面直角坐标系中，将二次函数 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的图象向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，得到如图所示的抛物线，该抛物线与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧)， $OA = 1$ ，经过点 A 的一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与 y 轴正半轴交于点 C ，且与抛物线的另一个交点为 D ， $\triangle ABD$ 的面积为 5。



(1) 求抛物线和一次函数的解析式。

(2) 抛物线上的动点 E 在一次函数的图象下方，求 $\triangle ACE$ 面积的最大值，并求出此时点 E 的坐标。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ ， $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 。

(2) $\triangle ACE$ 的面积最大值是 $\frac{25}{16}$ ，此时 E 点坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8})$ 。

【解析】(1) 将二次函数 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的图象向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，得到的抛物线解析式为 $y = a(x-1)^2 - 2$ ，

$\because OA = 1$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，代入抛物线的解析式得， $4a - 2 = 0$ ，

$\therefore a = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ ，即 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ ，

令 $y = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

$\therefore B(3, 0)$,

$\therefore AB = OA + OB = 4$,

$\therefore \triangle ABD$ 的面积为 5 ,

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot y_D = 5$,

$\therefore y_D = \frac{5}{2}$, 代入抛物线解析式得 , $\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$,

解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 4$,

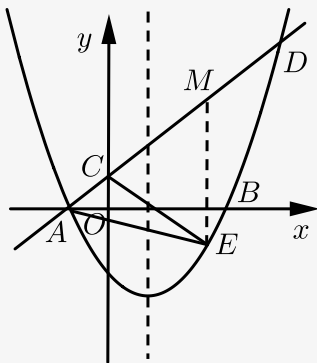
$\therefore D\left(4, \frac{5}{2}\right)$,

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = \frac{5}{2} \\ -k + b = 0 \end{cases} \text{ , 解得 : } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

(2) 过点 E 作 $EM \parallel y$ 轴交 AD 于 M , 如图 ,



设 $E\left(a, \frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2}\right)$, 则 $M\left(a, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)$,

$\therefore EM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2$,

$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AME} - S_{\triangle CME}$

$= \frac{1}{2} \times EM \cdot 1$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2 \right) \times 1$

$= -\frac{1}{4}(a^2 - 3a - 4)$,

$= -\frac{1}{4}\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{16}$,

$\therefore$ 当 $a = \frac{3}{2}$ 时 , $\triangle ACE$ 的面积有最大值 , 最大值是 $\frac{25}{16}$, 此时 E 点坐标为

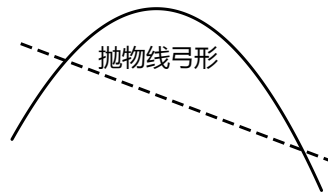
$\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

9. 2021年天津河西中考二模第25题10分 ★★★

如图所示，在抛物线上选定两点，我们把过这两点的线段和这条抛物线所围成的图形称作抛物线弓形．

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 与直线 $y = x$ 相交于点 O 和点 A ， OA 截得的抛物线弓形的曲线上有一点 P ．



(1) 当 $a = 1$ 时，解答下列问题：

- ① 求 A 点的坐标．
- ② 连接 OP ， AP ，求 $\triangle OPA$ 面积的最大值．
- ③ 当 $\triangle OPA$ 的面积最大时，直线 OP 也截得一个更小的抛物线弓形，同理在这个更小的抛物线弓形曲线上也有一点 P' ，连接 OP' ， $P'P$ ，当 $\triangle OP'P$ 的面积最大时，求这个 $\triangle OP'P$ 的最大面积与②中 $\triangle OPA$ 的最大面积的比值．

(2) 将(1)中 $a = 1$ 的条件去掉后，其它条件不变，则 $\triangle OP'P$ 的最大面积与 $\triangle OPA$ 的最大面积的比值是否变化？请说明理由．

【答案】 (1) ① $A(1, 1)$ ．

② $\frac{1}{8}$ ．

③ $\frac{1}{8}$ ．

(2) 不变，证明见解析．

【解析】 (1) ① 把 $a = 1$ 代入抛物线解析式得 $y = x^2$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}, \text{ 解得 } A(1, 1) .$$

② 设过点 P 与 OA 平行的直线为 $y = x + b$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + b \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - x - b = 0, \text{ 由 } \Delta = 0, \text{ 可得 } b = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore y = x - \frac{1}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \text{ 此时 } \triangle OPA \text{ 面积最大值为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{8} .$$

③ 由②直线 OP 的解析式 $y = \frac{1}{2}x$ ，

$$\text{设与 } OP \text{ 平行的直线为 } y = \frac{1}{2}x + b_1,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{2}x + b_1 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - \frac{1}{2}x - b_1 = 0, \text{ 由 } \Delta = 0, \text{ 可得 } b_1 = -\frac{1}{16},$$

$$\therefore \triangle OPP' \text{ 面积最大值为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64},$$

$\therefore \triangle OPP'$ 的面积与 $\triangle OPA$ 的面积之比 $\frac{1}{8}$.

(2) 不变 .

$y = ax^2 (a > 0)$ 与直线 $y = x$ 交点为 $(0,0)$ 和 $A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$,

设过点 P 与 OA 平行的直线为 $y = x + b$,

由 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = x + b \end{cases}$ 得 $ax^2 - x - b = 0$, 由 $\Delta = 0$, 可得 $b = -\frac{1}{4a}$,

$\therefore y = x - \frac{1}{4a}$,

$\therefore P\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$, 此时 $\triangle OPA$ 面积最大值为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{8a^2}$.

由 $OP: y = \frac{1}{2}x$,

设与 OP 平行的直线为 $y = \frac{1}{2}x + b_1$,

由 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = \frac{1}{2}x + b_1 \end{cases}$ 得 $2ax^2 - x - 2b_1 = 0$, 由 $\Delta = 0$, 可得 $b_1 = -\frac{1}{16a}$,

$\therefore \triangle OPP'$ 的面积最大值为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{16a} \times \frac{1}{2a} = \frac{1}{64a^2}$,

$\therefore \triangle OPP'$ 的面积与 $\triangle OPA$ 的面积之比 $\frac{1}{8}$.

【标注】【知识点】与函数有关的新定义

三、 由面积求坐标

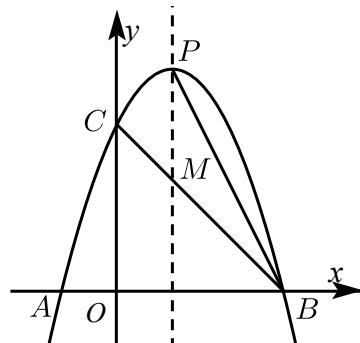
1. 面积相等问题

面积相等问题实质上就是利用 平行线间距离处处相等 的原理求解 .

栗子8

10. ★★★

如图 , 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,3)$ 三点 , 对称轴与抛物线相交于点 P , 与直线 BC 相交于点 M , 连接 PB .



(1) 求该抛物线的解析式 .

(2)

抛物线上是否存在一点 Q (不与点 P 重合), 使 $\triangle QMB$ 与 $\triangle PMB$ 的面积相等, 若存在, 求点 Q 的横坐标; 若不存在, 说明理由.

【备注】 面积相等问题可利用平行线间距离处处相等求解, 分两种情况求解:

①过点 P 作 $PQ \parallel BC$;

② $\because PM = 2$, $\therefore$ 将 BC 向下平移两个单位, 与抛物线的交点即为点 Q

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 存在, $Q_1(2, 3)$, $Q_2\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $Q_3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x-3)(x+1)$.

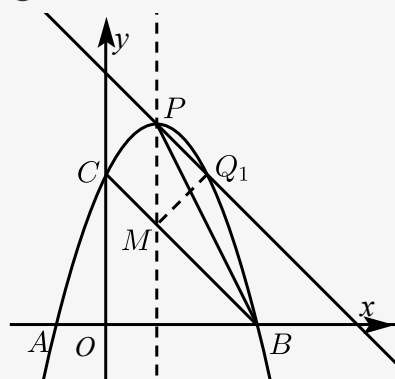
$\therefore 3 = a \cdot (-3)$, 即 $a = -1$,

$\therefore$ 所求解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $\because y = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $(1, 4)$.

①如图,



当点 Q 在直线 BC 上方时, 过点 P 作直线 BC 的平行线交抛物线于点 Q_1 , 易求直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$,

$\therefore$ 设直线 PQ_1 的解析式为 $y = -x + n$,

$\because$ 直线 PQ_1 过点 $P(1, 4)$, 代入求得 $n = 5$.

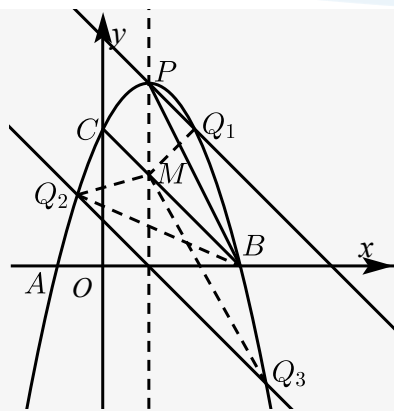
$\therefore$ 直线 PQ_1 的解析式为 $y = -x + 5$.

解方程组 $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$.

$\therefore$ 点 $(1, 4)$ 与 P 点重合.

$\therefore$ 点 $Q_1(2, 3)$.

②如图,



当点 Q 在直线 BC 下方时，

把直线 BC 向下平移 2 个单位，交抛物线于点 Q_2 、 Q_3 ，

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

综上所述， $Q_1(2, 3)$ ， $Q_2\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$ ， $Q_3\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 面积成比例问题

栗子9

11. 2019年天津滨海新区初三中考二模第25题10分 ★★★★★

在平面直角坐标系中， O 为原点，抛物线 $y = ax^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$ ，对称轴为直线 l ，点 O 关于直线 l 的对称点为点 B 。过点 A 作直线 $AC \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 C 。

(1) 求该抛物线的解析式及对称轴。

(2) 抛物线上是否存在点 Q ，使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$ ，若存在，求出点 Q 的坐标，若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$ ， $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

(2) 抛物线上存在点 Q ，坐标为 $(3\sqrt{3}, 0)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 15)$ ，使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$ 。

【解析】(1) $\because y = ax^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$ ，

$$\therefore -3 = a \times (\sqrt{3})^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\because A(\sqrt{3}, -3)$, $AC \parallel x$ 轴 ,

$\therefore AC = \sqrt{3}$, $OC = 3$,

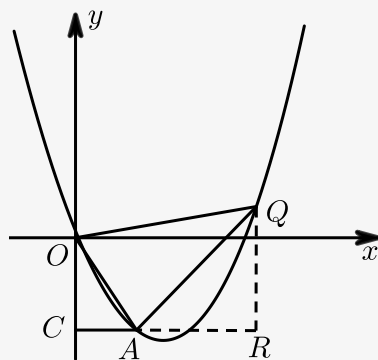
$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

又 $\because S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOQ}$,

$\therefore S_{\triangle AOQ} = 3S_{\triangle AOC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$,

设 Q 点坐标为 $\left(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m\right)$,

如图情况一 , 作 $QR \perp CA$, 交 CA 延长线于点 R ,



$\therefore S_{\triangle AOQ} = S_{\text{梯形} OCRQ} - S_{\triangle AQR} - S_{\triangle AOC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$

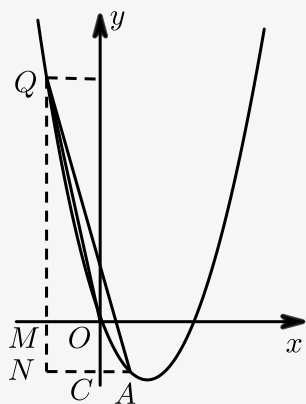
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot m \left(3 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m + 3 \right) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} (m - \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m + 3 \right) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

,

化简整理得 $m^2 - \sqrt{3}m - 18 = 0$,

解得 $m_1 = 3\sqrt{3}$, $m_2 = -2\sqrt{3}$,

如图情况二 , 作 $QN \perp AC$, 交 AC 延长线于点 N , 交 x 轴于点 M ,



$\therefore S_{\triangle AOQ} = S_{\triangle AQN} - S_{\triangle QMO} - S_{\text{梯形} OMNA} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$,

∴

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-m)\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}m+3\right)-\frac{1}{2}(-m)\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}m\right)-\frac{3}{2}(-m+\sqrt{3}-m) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

,

化简整理得 $m^2 - \sqrt{3}m - 18 = 0$,

解得 $m_1 = 3\sqrt{3}$, $m_2 = -2\sqrt{3}$,

∴ Q 点坐标为 $(3\sqrt{3}, 0)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 15)$,

∴ 抛物线上存在点 Q , 使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$.

【标注】【知识点】根据条件写一次函数解析式